

II Exercice d'électricité

Dans un exercice d'électricité, on est amené à étudier l'équation différentielle suivante, portant sur la fonction inconnue $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et où $f(t)$ désigne un terme de forçage supposé connu :

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = f(t) \quad \text{avec } \dot{u} \equiv du/dt. \quad (10)$$

1. Justifier l'intérêt / le pourquoi de l'introduction de la notation complexe $\underline{u} = u_{\max} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$.

Solution: L'équation étant linéaire à coefficients constants, la résolution par analyse de Fourier "s'impose", en développant la solution (ainsi qu'un éventuel terme de forçage) sur une base de fonctions harmoniques. On écrit ainsi (en supposant que toutes les fonctions ont les "bonnes" propriétés mathématiques pour cela) :

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{u}(\omega) e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{j\omega t}. \quad (11)$$

En injectant ces expressions dans l'équation Eq.10 et en intervertissant les dérivées temporelles et les signes sommes, on arrive sans peine à l'équation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left((j\omega)^2 + (j\omega)\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right) \hat{u}(\omega) e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{j\omega t}. \quad (12)$$

Au sens des fonctions, cela impose d'avoir :

$$\left(-\omega^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right) \hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega). \quad (13)$$

$\hat{u}(\omega)$ (tout comme $\hat{f}(\omega)$) étant *a priori* un nombre complexe, on peut l'écrire sous la forme $\hat{u}(\omega) = u_{\max} e^{j\varphi}$ en faisant apparaître module et argument.

Une manière plus pédestre d'arriver au même résultat consiste tout d'abord à noter le caractère "linéaire à coefficients constants" de l'équation différentielle, ce qui justifie le fait de s'intéresser à la réponse harmonique du système. En d'autres termes, il faut dire que la réponse du système au forçage $f(t)$ sera la somme des réponses aux différents termes en $e^{j\omega t}$ apparaissant dans la décomposition de Fourier ("en harmoniques") de $f(t)$. Dès lors, on ne considère plus qu'un forçage de la forme $\hat{f}(\omega) \cos(\omega t)$ avec un choix approprié de l'origine des temps, *i.e.* on a ramené l'équation Eq.10 à :

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = \hat{f}(\omega) \cos(\omega t). \quad (14)$$

À cette étape du raisonnement, on décide de remplacer ce problème ("la recherche de $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation Eq.14") par le problème suivant : déterminer $\underline{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant l'équation suivante :

$$\ddot{\underline{u}} + \frac{R}{L}\dot{\underline{u}} + \frac{1}{LC}\underline{u} = \hat{f}(\omega) e^{j\omega t}. \quad (15)$$

Si l'on trouve une telle solution, comme $\mathcal{Re}(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ est une opération linéaire, $\mathcal{Re}(\underline{u})$ satisfait l'équation Eq.14 et le problème "original" est résolu. Pour trouver une telle solution, on décide de la chercher sous la forme $\underline{u} = u_{\max} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$. L'intérêt de cette écriture est qu'elle ramène l'équation différentielle à une équation algébrique, car chaque opération de dérivation par rapport à t fait "tomber" un terme $j\omega$, et qui s'écrit bien évidemment :

$$\left(-\omega^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right) u_{\max} e^{j\varphi} = \hat{f}(\omega) \quad (16)$$

La dernière étape, toujours oubliée, devrait être une discussion sur le fait que cela permet effectivement de construire l'espace vectoriel (de dimension 2) des solutions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et que l'on a ainsi accès à l'ensemble des solutions (ou tout du moins celles suffisamment régulières mathématiquement parlant...)